Marius PERIANU
Grațian SAFTA
Costel ANGHEL

ESENȚIAL
Matematică
clasa a VIII-a

II

art
educațional

Cuprins

CAPITOLUL 1

Funcţii

1.1. Noţiunea de funcţie
1.2. Funcţii definite pe mulţimi finite
1.3. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$
Teste de evaluare
Fişă pentru portofoliul individual (A1)
1.4. Probleme cu caracter aplicativ

Competențe specifice vizate

1. Recunoaşterea unor corespondenţe care sunt funcţii;
2. Utilizarea valorilor unor funcţii în rezolvarea unor ecuaţii şi a unor inecuaţii;
3. Reprezentarea în diverse moduri a unor corespondenţe şi/ sau a unor funcţii în scopul caracterizării acestora;
4. Exprimarea prin reprezentări grafice a unor noţiuni de geometrie plană.

CAPITOLUL 1

Funcţii

Tema 1.1.

Noţiunea de funcţie

Definiţie. Fie A şi B două mulțimi nevide. Prin *funcție f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B* se înțelege orice lege (regulă, procedeu, convenție) prin care fiecărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $y = f(x) \in B$.

Prin $f : A \to B$ vom nota o funcție definită pe A cu valori în B. Mulţimea A se numeşte *domeniul de definiție* al funcției f, mulțimea B se numeşte *domeniul de valori* sau *codomeniul* funcției f, iar procedeul (regula) $y = f(x)$ se numeşte *legea de corespondență* a funcției f. Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numeşte *imaginea* lui x prin funcția f sau *valoarea funcției* f în punctul x.

Imaginea funcţiei. Fie $f : A \to B$ o funcție. *Imaginea* (sau mulțimea valorilor) funcției f este mulțimea: $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$. În mod evident, $\operatorname{Im} f \subset B$.

Putem scrie şi astfel: $\operatorname{Im} f = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\}$.

Graficul funcţiei. Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numeşte *graficul funcției f*. Avem şi $G_f = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x)\} \subset A \times B$.

Funcţia numerică este o funcție al cărei domeniu de definiție şi domeniu de valori ale unei funcții sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere).

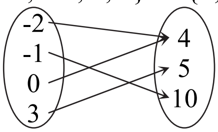
Reprezentarea geometrică a graficului. Dacă $f : A \to B$ este o funcție numerică, fiecărui element $(x, y) \in G_f$ îi putem asocia un punct $M(x, y)$ într-un reper cartezian. Submulțimea planului formată din toate punctele $M(x, y)$, cu $(x, y) \in G_f$ se numeşte *reprezentarea geometrică* a graficului funcției *f*.

Funcţii egale. Două funcții $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ sunt *egale* dacă $A = C$, $B = D$ şi $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Notăm: $f = g$.

Moduri de definire a unei funcţii. Funcțiile pot fi descrise în diverse moduri:

1. Printr-o ***diagramă***.

$f : \{-2; -1; 0; 3\} \to \{4; 5; 10\}$,



2. Printr-un ***tabel***.

$g : \{-1; 0; 2; 5\} \to \{1; 2; 3\}$.

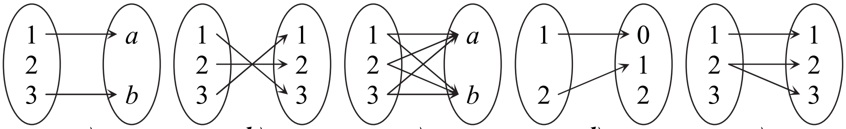
x	-1	0	2	5
$f(x)$	1	2	3	1

3. Prin una sau mai multe formule analitice:

$$h : \{0, 2, 4\} \to \{0, 4, 16\},\ h(x) = x^2; \qquad u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{dacă } x \le 1 \\ 2x + 3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}.$$

CUNOAŞTERE ŞI EXERSARE

1. Precizați care dintre următoarele diagrame definesc funcții:



a) ***b)*** ***c)*** ***d)*** ***e)***

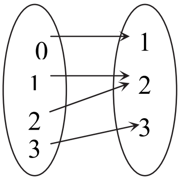
2. Precizați dacă scrierea $f:\{-1;0;1;2\} \to \{0;1;2;3;4\}$, $f(x)=x+1$, reprezintă o funcție.

3. Se consideră funcția $f:A \to B$ definită prin tabelul alăturat.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	3	4	5	6

a) Domeniul de definiție al funcției f este mulțimea $A=$ ....
b) Codomeniul cu numărul minim de elemente al funcției f este $B=$ ....
c) $f(-1)=$ ......
d) $f(2)=$......

4. În imaginea alăturată este descrisă funcția $f:A \to B$.



a) Domeniul de definiție al funcției f este ....
b) Elementele mulțimii $\operatorname{Im} f$ sunt : ....
c) Elementele mulțimii G_f sunt: ....

5. Tabloul alăturat descrie o funcție $f:A \to B$. Completați spațiile libere:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	4	5	6	7

a) Elementele mulțimii A sunt: ....
b) Elementele mulțimii $\operatorname{Im} f$ sunt: ....
c) Exprimată printr-o formulă, legea de corespondență este $x \to f(x)=$ …….. .

6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$. Completați spațiile libere:

a) $f(-2)=$ ....; ***b)*** $f(0)=$ ....;

c) $f(2)=$ ....; ***d)*** $f\left(\frac{1}{3}\right)=$ ....

7. Se consideră funcția $f:\{-2,-1,0,1,2,3\} \to A$.

a) Dacă $f(x)=2x+1$, atunci $\operatorname{Im} f=$ ....
b) Dacă $f(x)=3x-2$, atunci $\operatorname{Im} f=$ ....
c) Dacă $f(x)=-4x+5$, atunci $\operatorname{Im} f=$ ....

Rezolvare. ***a)*** $f(-2)=-3$, $f(-1)=-1$, $f(0)=1$; $f(1)=3$; $f(2)=5$; $f(3)=7$. Rezultă că $\operatorname{Im} f=\{-3,-1,1,3,5,7\}$

ACUMULARE ŞI CONSOLIDARE

8. Se consideră funcția $f:\left\{1,4,16,25,\frac{9}{49},\frac{36}{25}\right\}\to A$, $f(x)=\sqrt{x}$. Determinați mulțimea $\operatorname{Im} f$ a valorilor funcției *f*.

9. Se consideră funcția $f:\left\{-\sqrt{2},0,3\sqrt{2}\right\}\to A$. Determinați $\operatorname{Im} f$ dacă:

a) $f(x)=\sqrt{2}x+5$; ***b)*** $f(x)=\sqrt{2}x-3$; ***c)*** $f(x)=2-\sqrt{2}x$.

10. Precizați care din următoarele legi de corespondență reprezintă o funcție:

a) $f:\{-1,2,3\}\to\{-3,6,9\}$, $f(x)=3x$;

b) $g:\{-2,1,2\}\to\{-1,1,4\}$, $g(x)=x^2$;

c) $h:\{-1,0,1\}\to\{-1,0,3\}$, $h(x)=x^3$;

d) $s:\{-4,5\}\to\{-5,0,1,4\}$, $s(x)=-x$.

11. Explicați dacă mulțimea indicată reprezintă graficul unei funcții definite pe mulțimea $\{-2;-1;0;1;2\}$ cu valori în $\mathbb{R}$. În caz afirmativ, descrieți funcția printr-o diagramă.

a) $G_f=\{(-2;0);(-1;0);(0;1);(1;1);(2;2)\}$;

b) $G_g=\{(-2;-1);(-2;0);(-1;-1);(0;-1);(1;2)\}$;

c) $G_h=\{(-2;1);(-1;-1);(0;-1);(1;1);(1;2);(2;1)\}$.

12. ***a)*** Descrieți trei funcții definite pe mulțimea E a elevilor din clasa voastră cu valori în mulțimea $S=\{f;b\}$.

b) Descrieți trei funcții definite pe mulțimea E a elevilor din clasa voastră cu valori în mulțimea $\mathbb{N}$.

Indicație. $f:E\to\mathbb{N}$, $f(e)=$ numărul curent din catalog al elevului *e*.

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+5$. Aflați:

a) media aritmetică a numerelor $f(-2)$ și $f(-7)$;

b) media geometrică a numerelor $f(-2)$ și $f(-10)$.

14. Se consideră funcția $f:\{-3,-2,-1,0,1,2\}\to B$. Determinați $\operatorname{Im} f$ dacă:

a) $f(x)=|x+3|$; ***b)*** $f(x)=|x-2|$; ***c)*** $f(x)=|2x+1|$.

15. Se consideră funcția $f:\{-2,-1,0,1\}\to\{-1,1,3,5\}$. Precizați care dintre următoarele formule descriu funcția *f*:

a) $f(x)=x^2-1$; ***b)*** $f(x)=x^3$; ***c)*** $f(x)=1-2x$.

16. Fie mulțimile $R=\left\{3,14;\ \frac{7}{3};4;-1;-2\frac{1}{10};\sqrt{10}\right\}$ şi $I=\{-3;-1;1;2;3;4\}$.

a) Descrieți prin tabel şi precizați imaginea funcției $i:R\to I$, $i(x)=[x]$.

b) Scrieți elementele mulțimii G_i.

17. Fie mulțimile $R=\left\{7,2;3\frac{1}{2};5;-1,4;-\frac{1}{3}\right\}$ şi $F=\{0;\ 0,2;\ 0,5;\ 0,6;\ 0,(6)\}$.

a) Descrieți prin tabel şi precizați imaginea funcției $z:R\to F$, $z(x)=\{x\}$.

b) Scrieți elementele mulțimii G_z.

18. Se consideră mulțimile $A=\left\{-4;\frac{2}{5};\pi;0;\sqrt{3};-\frac{3}{2}\right\}$ şi $S=\{-1;0;1\}$.

a) Descrieți printr-un tabel funcția $f:A\to S$, $f(x)=\begin{cases}-1, \text{ pentru } x<0\\ 0, \text{pentru } x=0\\ 1, \text{ pentru } x>0\end{cases}$.

b) Precizați imaginea funcției f şi scrieți elementele mulțimii G_f.

19. Se consideră mulțimile $A=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ şi $M=\{0;1;2;3;4\}$.

a) Descrieți prin tabel şi precizați imaginea funcției $g:A\to M$, $g(x)=|x|$.

b) Scrieți elementele mulțimii G_g.

c) Reprezentați geometric mulțimea G_g.

20. Se consideră mulțimea $A=\left\{0;\ 1;\ \frac{4}{9};\ 1\frac{9}{25};\ 10,24;\ 11\right\}$ şi funcția $h:A\to\mathbb{R}$, $h(x)=\sqrt{x}$.

a) Scrieți elementele mulțimii $\operatorname{Im} h$ şi efectuați $\mathbb{Q}\cap\operatorname{Im} h$.

b) Descrieți printr-o formulă o funcție $p:\operatorname{Im} h\to A$.

21. Stabiliți pentru care din următoarele funcții are loc relația $-2\in\operatorname{Im} f$:

a) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-11$; ***b)*** $f:\{-3,-2,-1,0,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+4$.

c) $f:[-3,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-3$; ***d)*** $f:\left(-\frac{5}{4},+\infty\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=4x+3$.

Indicaţie. ***a)*** Dacă $-2\in\operatorname{Im} f$, atunci există $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x)=-2$, adică $x^2-11=-2$, de unde $x=3$. Aşadar, deoarece $f(3)=-2$, rezultă $-2\in\operatorname{Im} f$.

22. Se consideră mulțimile $M=\{28;55;27;39\}$ şi $N=\{9;17;13;4;5\}$. Verificați dacă asocierea: "oricare $x\in M$, $x\to y=f(x)\in N$, unde $f(x)$ este divizor al lui x", reprezintă o funcție definită pe mulțimea M cu valori în mulțimea N.

23. Se consideră mulțimea $U=\{30°,45°,60°\}$. Determinați imaginile funcțiilor:

a) $s:U\to\mathbb{R}$, $s(x)=\sin x$; ***b)*** $t:U\to\mathbb{R}$, $t(x)=\operatorname{tg} x$.

APROFUNDARE ŞI DEZVOLTARE

24. Arătaţi că următoarele funcţii sunt egale:

a) $f:\{-1,0,1\}\to\{0,1\}$, $f(x)=x^2$ şi $g:\{-1,0,1\}\to\{0,1\}$, $g(x)=|x|$;

b) $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}$ şi $g(x)=(x-|x|)(x+|x|)$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real a;

c) $f,g:(-1,0)\cup(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$ şi $g(x)=\dfrac{|x|-x}{2x}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a;

d) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2|x|$ şi $g(x)=\left(\sqrt{x^2}+1\right)^2-\sqrt{\left(x^2+1\right)^2}$;

25. Fie funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=$ ultima cifră a numărului natural x.

a) Determinaţi mulţimea $\operatorname{Im} f$.

b) Calculaţi suma $S=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(100)$.

26. Fie funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=$ ultima cifră a numărului natural 3^n .

a) Determinaţi mulţimea $\operatorname{Im} f$.

b) Calculaţi suma $S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2014)$.

27. ***a)*** Descrieţi prin diagrame toate funcţiile care pot fi definite pe mulţimea $A=\{a;b;c\}$ cu valori în mulţimea $B=\{0;1\}$.

b) Descrieţi prin diagrame toate funcţiile care pot fi definite pe mulţimea $A=\{a;b\}$ cu valori în mulţimea $B=\{-1;0;1\}$.